

Marius Perianu
Cătălin Stănică
Ștefan Smărândoiu

Matematică

Clasa a V-a

I



Algebră

I. Numere naturale

I.1.	Scrierea și citirea numerelor naturale	8
I.2.	Reprezentarea numerelor naturale pe axa numerelor. Compararea numerelor naturale. Aproximări	14
	Teste de evaluare	18
	Fișă pentru portofoliul individual (A1)	19
I.3.	Adunarea numerelor naturale	21
I.4.	Scăderea numerelor naturale	27
I.5.	Înmulțirea numerelor naturale	32
I.6.	Factor comun	38
	Teste de evaluare	42
	Fișă pentru portofoliul individual (A2)	45
	Test-model pentru Evaluarea Națională.	47
I.7.	Împărțirea cu rest zero a numerelor naturale	49
I.8.	Împărțirea cu rest a numerelor naturale	52
	Teste de evaluare	56
	Fișă pentru portofoliul individual (A3)	59
I.9.	Puterea cu exponent natural a unui număr natural	61
I.10.	Reguli de calcul cu puteri	64
I.11.	Compararea puterilor numerelor naturale	67
I.12.	Pătrate perfecte. Cuburi perfecte. Alte probleme în care intervin puteri	70
I.13.	Scrierea în baza 10. Scrierea în baza 2. Sisteme de numerație (extindere)	73
I.14.	Ordinea efectuării operațiilor. Utilizarea parantezelor	76
	Teste de evaluare	80
	Fișă pentru portofoliul individual (A4)	59
	Test-model pentru Evaluarea Națională.	85
I.15.	Probleme cu caracter aplicativ	87
I.16.	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade.	93

II. Metode aritmetice de rezolvare a problemelor

II.1.	Metoda reducerii la unitate	100
II.2.	Metoda comparației	103
II.3.	Metoda figurativă.	106

II.4.	Metoda mersului invers	111
II.5.	Metoda falsei ipoteze	117
	Teste de evaluare	125
	Fișă pentru portofoliul individual (A5)	127
	Test-model pentru Evaluarea Națională	129
II.6.	Probleme cu caracter aplicativ	131
III. Divizibilitatea numerelor naturale		
III.1.	Divizibilitatea numerelor naturale.....	136
III.2.	Criterii de divizibilitate	141
III.3.	Numere prime. Numere compuse.....	145
	Teste de evaluare	150
	Fișă pentru portofoliul individual (A6)	153
	Test-model pentru Evaluarea Națională	155
III.4.	Probleme cu caracter aplicativ	157
III.5.	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade.....	159
IV. Variante de subiecte pentru teză		
	Varianta 1	162
	Varianta 2	163
	Varianta 3	164
	Varianta 4	165
	Varianta 5	166
	Varianta 6	167
	Varianta 7	167
	Varianta 8	168
	Varianta 9	168
	Varianta 10	169
	Soluții	170

Algebră

8	I.1	Scrierea și citirea numerelor naturale
14	I.2	Reprezentarea numerelor naturale pe axa numerelor. Compararea numerelor naturale. Aproximări
18		Teste de evaluare
19		Fișă pentru portofoliul individual (A1)
21	I.3	Adunarea numerelor naturale
27	I.4	Scăderea numerelor naturale
32	I.5	Înmulțirea numerelor naturale
38	I.6	Factor comun
42		Teste de evaluare
45		Fișă pentru portofoliul individual (A2)
47		Test-model pentru Evaluarea Națională
49	I.7	Împărțirea cu rest zero a numerelor naturale
52	I.8	Împărțirea cu rest a numerelor naturale
56		Teste de evaluare
59		Fișă pentru portofoliul individual (A3)
61	I.9	Puterea cu exponent natural a unui număr natural
64	I.10	Reguli de calcul cu puteri
67	I.11	Compararea puterilor numerelor naturale
70	I.12	Pătrate perfecte. Cuburi perfecte. Alte probleme în care intervin puteri
73	I.13	Scrierea în baza 10. Scrierea în baza 2. Sisteme de numerație (extindere)
76	I.14	Ordinea efectuării operațiilor. Utilizarea parantezelor
80		Teste de evaluare
83		Fișă pentru portofoliul individual (A4)
85		Test-model pentru Evaluarea Națională
87	I.15	Probleme cu caracter aplicativ
93	I.16	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade

I

Numere naturale

I.1. Scrierea și citirea numerelor naturale

Scrierea. Pentru scrierea unui număr natural, se folosesc unul sau mai multe din următoarele zece simboluri, numite *cifre arabe*:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Fiecare număr se scrie ca o succesiune de cifre, care se pot repeta, prima cifră a unui număr natural de cel puțin două cifre fiind diferită de 0. De asemenea, fiecare succesiune de cifre reprezintă un număr.

Acest mod de scriere a unui număr natural se numește *sistem zecimal* sau *în baza zece*, pentru că zece unități de un anumit ordin formează o unitate de ordin imediat mai mare.

Citirea. Pentru a citi un număr natural, grupăm cifrele câte trei de la dreapta spre stânga. Aceste grupe se numesc clase. Fiecare clasă se compune din unități, zeci și sute. În ordine de la dreapta la stânga avem: clasa unităților, clasa miilor, clasa milioanei, clasa miliardelor etc. Din acest motiv, scrierea numerelor în baza zece este o scriere *pozițională*, deoarece fiecare cifră are o anumită valoare după locul unde este scrisă.

Exemplu: În numărul 23 472 508 216, cifra 2 apare de trei ori, de la dreapta spre stânga și ea are următoarele valori: sute, milioane și respectiv zeci de miliarde.

sute de miliarde	zeci de miliarde	miliarde	sute de milioane	zeci de milioane	milioane	sute de mii	zeci de mii	mii	sute	zeci	unități
	2	3	4	7	2	5	0	8	2	1	6
clasa miliardelor			clasa milioanei			clasa miilor			clasa unităților		

Descompunerea zecimală. Orice număr natural de două sau mai multe cifre se scrie în mod unic sub forma unei sume de produse între fiecare cifră din scrierea numărului și numărul ce indică ordinul cifrei respective (1, 10, 100, 1000 etc.).

Exemple:

$$1 \ 37 = 3 \cdot 10 + 7$$

$$2 \ 275 = 2 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 5$$

$$3 \ 8086 = 8 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 6$$

Cazul general

$$\overline{ab} = 10 \cdot a + b$$

$$\overline{abc} = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c$$

$$\overline{abcd} = 1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot c + d$$

Observație. Numărul de numere naturale n cuprinse între două numere naturale a și b date:

- de la 1 la n sunt n numere naturale, iar de la 0 la n sunt $n + 1$ numere naturale;
- în general, de la a la b (incluzându-le pe a și b) sunt $b - a + 1$ numere naturale.

Exersare



1 Citiți numerele:

a 123 000 456;

b 985 420;

c 203 005 023;

d 987 654 321;

e 100 005;

f 403 067;

g 98 700 654;

h 120;

i 202 022.

2 Scrieți în baza zece, numerele:

a treizeci și nouă;

b două sute patruzeci;

c două mii trei;

d nouă mii nouă sute;

e o mie șapte sute cinci;

f trei milioane o sută;

g trei mii;

h trei mii două sute trei;

i două sute șaisprezece.

3 Scrieți, în baza zece, numerele:

a trei milioane cinci sute nouăzeci și șapte de mii douăzeci și doi;

b opt milioane patru sute trei mii cinci sute treizeci și cinci;

c treizeci și șapte de milioane optzeci de mii șase;

d patru sute patruzeci și trei de mii opt sute unu.

4 **a** Scrieți patru numere impare cu suma cifrelor 3.

b Scrieți trei numere impare cu produsul cifrelor 8.

c Scrieți patru numere pare cu suma cifrelor 12.

5 **a** Scrieți 4 numere pare, având suma cifrelor 3.

b Scrieți 4 numere impare de două cifre, având diferența cifrelor egală cu 1.

6 Dați trei exemple de numere naturale de forma $\overline{abcdcba}$ și apoi citiți-le.

7 Determină câte numere cuprinse între 41 și 80 conțin:

a cifra 6;

b cifra 4;

c două cifre consecutive;

d cifrele 4 sau 8;

e o cifră pară;

f două cifre impare.

8 **a** Câte cifre se folosesc pentru a scrie toate numerele naturale până la 20 inclusiv?

b Câte cifre se folosesc pentru a scrie toate numerele de la 1 la 35, inclusiv 1 și 35?

c De câte ori se utilizează cifra 5 pentru a scrie toate numerele naturale de 3 cifre?

9 Câte numere naturale cuprinse între 500 și 550 conțin:

a cifra 3;

b două cifre identice;

c cifrele 0 sau 7?

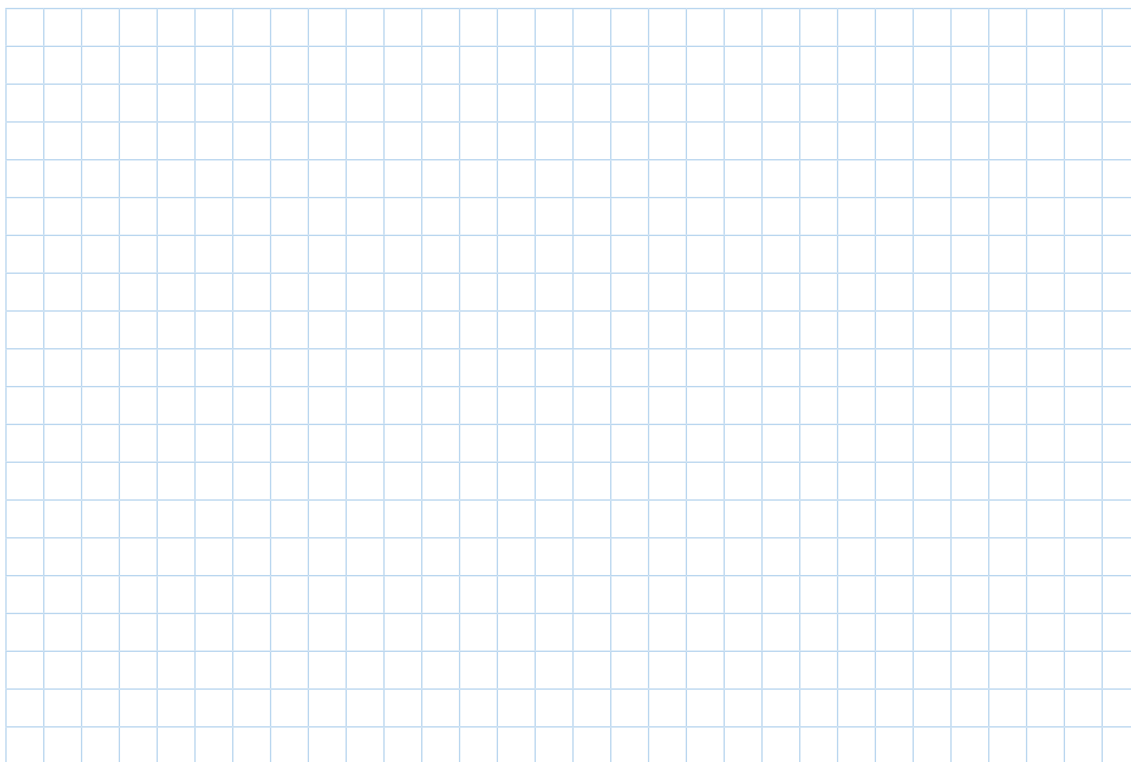
Rezolvare: **a** Numerele care conțin cifra 3 sunt: 503, 513, 523, 543 și 530, 531, 532, ..., 539.

În total sunt 14 numere.



- 10 a** Determinați numerele de forma $\overline{abc}$ știind că $\overline{abc} = 7 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 1$.
- b** Determinați cifrele a, b, c știind că $634 = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$.
- c** Determinați cifrele a, b, c, d știind că $\overline{4a5c} = b \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + d \cdot 10 + 9$.
- d** Determinați cifrele a, b, c, d știind că $\overline{ab2d} = b \cdot 1000 + c \cdot 100 + d \cdot 10 + a$.

Rezolvă problema chiar aici:



- 11 a** Determinați numerele de forma $\overline{a2b5}$ știind că produsul cifrelor sale este 120.
- b** Determinați numerele de forma $\overline{11a3b7}$ știind că suma cifrelor sale este 17.
- 12 a** Aflați numerele naturale $\overline{ab}$ pentru care $\overline{a2b} = \overline{2ba}$.
- b** Aflați numerele naturale $\overline{abc}$ pentru care $\overline{a4bc} = \overline{cbaa}$.
- c** Câte numere naturale $\overline{abcd}$ verifică egalitatea $\overline{a7bd} = \overline{cadb}$?
- 13 a** Aflați cifrele a și b știind că răsturnatul numărului $\overline{a4}$ este $\overline{b5}$.
- b** Aflați cifrele a, b, c știind că răsturnatul numărului $\overline{5ab4}$ este $\overline{403c}$.
- c** Aflați cifrele a, b, c și d știind că răsturnatul numărului $\overline{abc6}$ este $\overline{bcb3}$, iar răsturnatul numărului $\overline{3bcd}$ este $\overline{90ba}$.
- 14 a** Câte numere naturale sunt de la 1 la 34? Dar de la 0 la 25? Dar de la 7 la 28?
- b** Câte numere naturale sunt de la 1 la 9? Dar de la 11 la 75? Dar de la 111 la 211?

Rezolvare: **a** De la 1 până la 34 sunt 34 numere naturale. De la 0 până la 25 sunt 26 numere naturale. De la 7 până la 28 sunt $28 - 7 + 1 = 22$ numere naturale.

15 a Câte numere pare și câte impare sunt de la 127 până la 579?

b Determinați câte numere pare sunt de la 444 până la 2012.

Rezolvare: a Numerele care trebuie *numărate* se repetă din 2 în 2. Vom utiliza un *contor de numărare*.¹ Numerele pare cuprinse între 127 și 579 sunt $128 = 2 \cdot 64$, $130 = 2 \cdot 65$, ..., $578 = 2 \cdot 289$, adică sub forma $2k$, unde k (pe care îl vom numi **contor**) ia valori consecutive de la 64 la 289.

Problema se reduce la aflarea numărului de valori pe care le ia contorul, deci trebuie să găsim câte numere naturale sunt de la 64 până la 289, adică $289 - 64 + 1 = 226$ numere.

În același fel, numerele impare de la 127 până la 579 se pot scrie: $127 = 2 \cdot 63 + 1$, $129 = 2 \cdot 64 + 1$, $131 = 2 \cdot 65 + 1$, ..., $557 = 2 \cdot 287 + 1$, $579 = 2 \cdot 289 + 1$, deci contorul k ia valori de la 63 la 289. Ca urmare, între 127 și 579 sunt $289 - 63 + 1 = 227$ numere pare.

16 a Scrieți primele 12 numere din șirul numerelor naturale.

b Care este al 57-lea număr natural din șirul numerelor naturale nenule?

c Care este al 33-lea număr par din șirul numerelor naturale nenule?

d Care este al 257-lea număr natural par din șirul numerelor naturale?

e Care este al 138-lea număr natural impar din șirul numerelor naturale?

Rezolvare: c Cum șirul numerelor naturale nenule este $1, 2, \dots, n, \dots$, iar numerele pare nenule sunt de forma $2 \cdot k$, $k \in \mathbb{N}^*$, rezultă că al 33-lea număr par nenul este $2 \cdot 33 = 66$.

17 Pe ecranul calculatorului sunt scrise toate numerele de la 600 la 2013. Alin utilizează un program care șterge de pe ecran numerele pare. Câte numere rămân pe ecran?

18 Aflați câte numere se găsesc în fiecare dintre secvențele:

a 1, 2, 3, ..., 30;

b 10, 11, 12, ..., 30;

c 2, 4, 6, 8, ..., 200;

d 0, 1, 2, 3, ..., 19;

e 17, 18, 19, ..., 156;

f 11, 13, 15, 17, ..., 137;

g 15, 20, 25, ..., 125;

h 9, 12, 15, ..., 249;

i 6, 12, 18, ..., 660.

19 a Câte numere impare se găsesc în șirul: 5, 6, 7, 8, ..., 20?

b Câte numere pare se găsesc în șirul: 2, 4, 6, 8, ..., 80?

c Câte numere pare se găsesc în șirul: 7, 14, 21, 28, ..., 140?

d Câte numere impare se găsesc în șirul: 5, 10, 15, 20, ..., 215?

20 Pentru fiecare din șirurile de mai jos observați regula de alcătuire și scrieți încă trei numere:

a 8, 14, 20, ..., ..., ...

b 12, 23, 34, ..., ..., ...

c 13, 35, 57, ..., ..., ...

d 1, 4, 16, ..., ..., ...

e 5, 11, 23, ..., ..., ...

f 7, 20, 59, ..., ..., ...

21 a Câte numere de două cifre există? Câte numere impare de trei cifre există?

b Aflați câte numere de două cifre distincte există.

c Determinați numărul de numere pare de forma $\overline{ab5c}$.

d Determinați câte numere pare sunt de forma $\overline{2ab6c}$.

Rezolvare: a Prima cifră a unui număr de două cifre $\overline{ab}$ poate fi oricare cifră de la 1 până la 9, adică se poate alege în 9 moduri. Pentru a doua cifră sunt 10 posibilități de alegere, adică oricare dintre cifrele de la 0 până la 9. Pentru fiecare cifră a putem scrie oricare din cele 10 cifre b , deci vor fi $9 \cdot 10 = 90$ numere naturale diferite.

¹ Metoda contorului de numărare se utilizează, în general, pentru determinarea numărului de termeni ai unei secvențe de numere naturale care se obțin numărând din r în r începând de la primul termen al secvenței, unde r este un număr natural nenul dat. Vom învăța că o astfel de secvență se numește *progresie aritmetică*, iar r se numește rația progresiei.

Dacă $\overline{abc}$ este un număr impar, atunci cifra a poate lua 9 valori, cifra b 10 valori, iar cifra c 5 valori (1, 3, 5, 7 sau 9), deci sunt $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$ numere impare de trei cifre.

Metoda folosită mai sus se numește:

Regula produsului. Numărul numerelor de n cifre cu proprietatea că pentru cifra de pe poziția k (unde $k = 1, 2, \dots, n$) există a_k posibilități de alegere, independente de alegerile cifrelor anterioare, este egal cu $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$.

- 22** Utilizând, eventual, regula produsului descrisă mai sus, determinați:
- a** câte numere de trei cifre se pot forma, folosind numai cifrele 5 și 7;
 - b** câte numere de trei cifre se pot forma, folosind numai cifrele 2, 3 și 4;
 - c** câte numere impare de patru cifre se pot forma cu numerele 1, 2, 3 și 4.
- 23** **a** Câte numere naturale de patru cifre se pot forma cu cifrele 2, 5 și 8?
b Câte numere naturale de patru cifre se pot forma cu cifrele 0, 2, 7?
- 24** Determinați:
- a** Câte numere naturale de 6 cifre încep cu 123?
 - b** Câte numere naturale de 6 cifre se termină cu 123?
 - c** Câte numere naturale de 6 cifre conțin secvența de cifre 123?
 - d** Câte numere naturale de 6 cifre distincte se termină cu 123?
- 25** **a** Câte cifre s-au folosit pentru numerotarea unei cărți cu 100 de pagini?
b Pentru numerotarea paginilor unei culegeri de matematică s-au folosit 450 cifre. Câte pagini are culegerea?
- 26** **a** Câte cifre s-au folosit pentru numerotarea unei cărți cu 1 024 de pagini?
b Pentru numerotarea paginilor unei enciclopedii s-au utilizat 3 389 cifre. Câte pagini are enciclopedia?
- 27** **a** Câte numere impare se găsesc în șirul: 17, 18, 19, ..., 173?
b Câte numere pare se găsesc în șirul: 3, 6, 9, 12, 15, 18, ..., 300?
c Câte numere conține următorul șir: 11, 16, 21, ..., 2 011?

Aprofundare



- 28** Determinați:
- a** de câte ori se folosește cifra 3 în scrierea numerelor naturale de la 1 la 100;
 - b** de câte ori se folosește cifra 1 în scrierea numerelor naturale de la 1 la 1 000.
- 29** **a** Câte numere naturale de forma $\overline{aba}$ cu $a \neq 0$ și $a \neq b$ există?
b Câte numere naturale au forma $\overline{abcabc}$, cu $a \neq 0$ și $a \neq b \neq c \neq a$?
c Câte numere naturale sunt de forma $\overline{abc}$, cu $a \neq 0$ și $a < b < c$?
- 30** **a** Câte numere naturale au forma $\overline{abcd}$, cu $a \neq 0$ și $a > b > c > d$?
b Câte numere naturale impare sunt de forma $\overline{abcd}$ cu $a \neq 0$ și $a > b > c > d$?
c Câte numere naturale sunt de forma $\overline{abc}$ au produsul cifrelor număr impar?

- 31 a** Determinați numerele naturale de forma $\overline{abc}$, știind că $a + c = 3$.
- b** Determinați numerele naturale de forma $\overline{abc}$, știind că $a + c = 6 \cdot b$.
- 32** Determinați cifrele a, b, c, d, e știind că $\overline{abcd}$, $\overline{a4c7b}$ și $\overline{2b5de}$ sunt numere naturale pare consecutive.
- 33** Aflați numărul perechilor de numere naturale consecutive de forma $\overline{ab3}$, $\overline{ca4}$.

Probleme de șapte stele



- 34** Se construiește numărul natural 35355355535555... după regula: după primul trei se scrie un cinci, după al doilea trei doi de cinci, după al treilea trei se scriu trei de cinci ș.a.m.d.
- a** Care este cifra de pe poziția 21?
- b** A câta cifră a numărului va fi a zecea cifră de 3?
- 35** Determinați al 13-lea număr din șirul de numere: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,
- Indicație:** Observați legătura între fiecare termen, începând cu al treilea, și cei doi termeni anteriori.
- 36** Aflați câte numere au în comun șirurile 10, 15, 20, ..., 2010 și 10, 14, 18, ..., 2010.
- 37** Determinați numărul termenilor secvenței
- $$1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, \dots, 2513.$$
- 38** Determinați cifra de pe poziția 2020 a numărului:
- $$A = 12222322242222522222\dots 2011\underbrace{1222\dots 2}_{2011 \text{ cifre}}.$$